סמינר - K-theory and Bott Periodicity

שי בן משה

2 בדצמבר 2015

1 הקדמה

X האוסדורף קומפקטי.

הגדרה 1.1 אגד וקטורי זה $p : E \to X$, ומבנה של מ"ו לכל $p^{-1}(x)$, כך שיש $X = \bigcup U_\alpha$ ו-$h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ (טריוויאליזציה מקומית) וגם ש-$\{x\} \times \mathbb{C}^n$ איזו' (מ"ו) ל-$p^{-1}(x)$ על ידי h_i.

דוגמה 1.2 האגד הטריוויאלי (ה-n מימדי) $E = X \times \mathbb{C}^n$.

בדיחה: What do you get when the chicken crosses the road? The trivial road bundle over the chicken! נמשיך.

דוגמה 1.3 האגד הטאוטולוגי של $\mathbb{C}P^n$: ניקח ישרים ℓ ב-$\mathbb{C}^{n+1}$, זה $\mathbb{C}P^n$, $E = \left\{(\ell, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in \ell\right\}$ (טופולוגיה כתת-מרחב).
טריו' מקומית ל-$\mathbb{R}P^2$ (כי קל לדמיין): לכל ישר $\ell \in \mathbb{R}P^2$, נסתכל על U_ℓ שהוא כל הישרים שאינם ניצבים לו, וטריו' תהיה הטלה אורתוגונלית.

הגדרה 1.4 איזומורפיזם בין $E_1 \to X, E_2 \to X$ מוגדר כהומאומורפיזם $E_1 \cong E_2$ כך שכל סיב הולך לסיב המתאים על ידי איזומורפיזם של מ"ו.

הגדרה 1.5 סכום ישר של $p_1 : E_1 \to X, p_2 : E_2 \to X$ זה $E_1 \oplus E_2 := \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(e_1) = p_2(e_2)\}$.

טענה 1.6 זה אכן אגד וקטורי.

הוכחה: $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \to X \times X$ אגד וקטורי עם טריו' מקומית $h_{ij} = h_{1,i} \times h_{2,j}$. הצמצום לאלכסון $X = \{(x, x) \in X \times X\}$ תת-אגד וקטורי, וזה $E_1 \oplus E_2$. ■

הגדרה 1.7 מכפלה פנימית זה $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \oplus E \to \mathbb{C}$, כך שבכל סיב היא מ"פ.

טענה 1.8 לכל אגד וקטורי קיימת מ"פ.

הוכחה: יש את $\mathrm{pr}_2 h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, מ"פ על U_α, $\langle u, v \rangle_\alpha = \langle \mathrm{pr}_2 h_\alpha(u), \mathrm{pr}_2 h_\alpha(v) \rangle$.
φ_α חלוקת יחידה $\langle u, v \rangle = \sum \varphi_\alpha(p(u)) \langle u, v \rangle$. ■

טענה 1.9 אם $E_0 \subset E$ תת-אגד, אז יש $E_0^\perp$ כך ש-$E_0 \oplus E_0^\perp \cong E$.

הוכחה: (סקיצה), $E_0^\perp$ בכל סיב הוקטורים המאונכים, צריך רק טריו' מקומיות ואז $E_0 \oplus E_0^\perp \cong E$ ברור.
טריו' מקומית סביב $x \in X$, לוקחים $s_1, \ldots, s_m$ חתכים מקומיים בת"ל ב-E_0. משלימים ב-x ל-$s_1, \ldots, s_m, s_{m+1}, \ldots, s_n$ בסיס ל-E. מרציפות הדטרמיננטה, אפשר לעשות את זה בסביבה של x.
עושים גרם-שמידט וסיימנו. ■

טענה 1.10 לכל E יש E' כל ש־$E \oplus E'$ טריוויאלי.

הוכחה: (סקיצה) משתמשים בטירוויאליזציות המקומיות ובלמה של אוריסון כדי לבנות העתקות לינאריות $g_x : E \to \mathbb{C}^n$ חח"ע בכל סיב בסביבה של x. מקומפקטיות מצטמצמים לכמות סופית ולוקחים $g = (g_{x_1}, \dots, g_{x_k}) : E \to \mathbb{C}^{nk}$, שהיא חח"ע בכל סיב.
$f = (p, g) : E \to X \times \mathbb{C}^{nk}$, התמונה של E היא תת־אגד וקטורי, כי הצמצום ל־$\mathbb{C}^n$ ה־i נותן טריוויאליזציה מקומית, אז E איזומורפי לתת־אגד של טריוויאלי, וזה נובע מהטענה הקודמת. ∎

$p : E \to X$ אגד וקטורי, U_α, U_β עם טריו' $h_\cdot : p^{-1}(U_\cdot) \to U_\cdot \times \mathbb{C}^n$, נביט ב־$h_\beta h_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{C}^n \to U_\beta \times \mathbb{C}^n$.
נצטמצם ל־$U_\alpha \cap U_\beta$, ומתקיים $h_\beta h_\alpha^{-1}(x, v) = (x, g_{\beta\alpha}(v))$, כש־$g_{\beta\alpha} \in GL_n(\mathbb{C})$ היא **transition function**.
כמובן ש־$g_{\gamma\beta} g_{\beta\alpha} = g_{\gamma\alpha}$, והמידע הזה הוא מספיק כדי לשחזר את E, על ידי $\coprod U_\alpha \times \mathbb{C}$ מודולו הדבקות מתאימות.
סכום ישר זה $g^1_{\beta\alpha} \oplus g^2_{\beta\alpha}$.

הגדרה 1.11 מכפלה טנזורית של $p_1 : E_1 \to X, p_2 : E_2 \to X$ עם transition functions $g^1_{\beta\alpha}, g^2_{\beta\alpha}$, נגדיר שזה $E_1 \otimes E_2 := \coprod p_1^{-1}(x) \otimes p_2^{-1}(x)$ עם $g_{\beta a} := g^1_{\beta\alpha} \otimes g^2_{\beta\alpha}$.

הגדרה 1.12 משיכה לאחור של $p : E \to Y$ לפי $f : X \to Y$ זה $f^*(E) := \{(x, v) \in X \times E \mid f(x) = p(v)\}$, ויש $p'(x, v) = x$ ו־$f'(x, v) = v$.

$$\begin{tikzcd} f^*(E) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

למה 1.13 הצמצומים של $E \to X \times I$ ל־$X \times \{0\}, X \times \{1\}$ איזומורפיים.

מסקנה 1.14 עבור $p : E \to Y$ ו־$f_0, f_1 : X \to Y$ הומוטופיות מתקיים $f_0^*(E) \cong f_1^*(E)$.

2 חישוב H ו־Cluthing Functions

הגדרה 2.1 יהי $p : E \to X$, בהינתן f אוטומורפיזם של $p \times \mathrm{id} : E \times S^1 \to E \times S^1$, נבנה את $[E, f] \to X \times S^2$ כאיחוד זר של שני $E \times D^2$, כשמדביקים את ה־$E \times S^1$. f נקראת ה־cluthing function של $[E, f]$.

הערה 2.2 אם ניקח כל המיספרה ונרחיב אותה טיפה, זה יוצא בדיוק ההגדרה הכללית עם ההדבקות (כמו במכפלה טנזורית).

דוגמה 2.3 מקרה פרטי, עבור $X = \cdot$, $E = \mathbb{C}^n$, ולכן זה אוטומורפיזם $f : \mathbb{C}^n \times S^1 \to \mathbb{C}^n \times S^1$, או באופן שקול $f : S^1 \to GL_n(\mathbb{C})$, ו־$[E, f] \to \cdot \times S^2 \cong S^2$.

טענה 2.4 $f : S^1 \to GL_1(\mathbb{C}), z \mapsto (z)$ היא cluthing function לאגד הטאוטולוגי H על $\mathbb{C}P^1$. כלומר $H \cong [1, z]$.

הוכחה: $\mathbb{C}P^1 = \{[z_0, z_1]\}$. לכל מחלקה $z := \frac{z_0}{z_1}$. האגד הוא $p^{-1}([z_0, z_1]) = [z_0, z_1] = \{\lambda(z_0, z_1)\}$.
נגדיר $D_0 = \{|z| \leq 1\}, D_\infty = \left\{\left|z^{-1}\right| \leq 1\right\}$, אז $\partial D_0 = \partial D_\infty = S^1$.
טריו' מקומית ל־D_0 היא $h_0 : E_0 \to D_0 \times \mathbb{C}$ שנתונה על ידי $h_0(\lambda(z_0, z_1)) = h_0(\lambda z, \lambda) = ([z, 1], \lambda)$.
בדומה $h_\infty(\mu(z_0, z_1)) = h_\infty\left(\mu, \mu w^{-1}\right) = \left(\left[1, w^{-1}\right], \mu\right)$.
אז ה־cluthing function היא מה שמתקבל מ־$h_\infty h_0^{-1}$, שנתונה על ידי $([z, 1], \lambda) \mapsto (\lambda z, \lambda) = \left(\mu, \mu w^{-1}\right) \mapsto \left(\left[1, w^{-1}\right], \mu\right) = ([z, 1], \lambda z)$, קרי $f(z) = z$. ∎

טענה 2.5 $(H \otimes H) \oplus 1 = H \oplus H$

הוכחה: ה־cluthing function הן בהתאם $f\oplus f$, $f\cdot f\oplus 1$ כלומר $z\mapsto\begin{pmatrix}z & \\ & z\end{pmatrix}$, $z\mapsto\begin{pmatrix}z^2 & \\ & 1\end{pmatrix}$.
מקשירות $GL_2(\mathbb{C})$ מתקיים שיש מסילה α_t מ־$\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$ ל־$\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$.
$(f\oplus 1)\,\alpha_t\,(1\oplus f)\,\alpha_t$ וזה מתאים. ■

3 הפנקטור K

אנחנו מרחיבים את ההגדרה, כך שהטריו' המקומיות יכולות להיות ממימדים שונים.

הגדרה 3.1 $E,E'\to X$ יקראו **איזומורפיים יציב** אם $E\oplus n=E'\oplus n$ ל־n כלשהו, $E\approx E'$.
בדומה אם $E\oplus n=E'\oplus m$ אז $E\sim E'$.

טענה 3.2 שניהם יחסי שקילות.

טענה 3.3 $\widetilde{K}(X)$ מחלקות שקילות של $\sim$ היא חבורה ביחס לסכום ישר.

הוכחה: ראינו שלכל E יש E' כך ש־$E\oplus E'=n$ ל־n כלשהו, אז E' הוא הנגדי (צריך להרכיב כמה כאלה, מכל המימדים, כי המימד לא קבוע). ■

טענה 3.4 $K(X)$ חבורת גרותנדיק של מחלקות שקילות של $\approx$ היא חבורה ביחס לסכום ישר, ומסמנים את האיברים $E-E'$.

יש $K(X)\to\widetilde{K}(X)$ ששולח את מחלקת־$\approx$ של $E-n$ למחלקת־$\sim$ של E (מוגדר היטב).
היא כמובן על, והגרעין הוא כש־$E\sim 0$ כלומר $E\approx m$, אז המקור הוא במחלקת־$\approx$של $m-n$, קרי $\{m-n\}$ איזומורפי ל־$\mathbb{Z}$.
הצמצום $K(X)\to K(x_0)$ הוא איזומורפיזם על $\{m-n\}$, ולכן $\widetilde{K}(X)=\ker(K(X)\to K(x_0))$, ויש פיצול $K(X)\cong\widetilde{K}(X)\oplus K(x_0)\cong\widetilde{K}(X)\oplus\mathbb{Z}$.

הסדרה $0\longrightarrow\widetilde{K}(X)\longrightarrow K(X)\underset{c_{x_0}^*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}}K(x_0)\longrightarrow 0$ היא מדוייקת, אז זה מה־splitting lemma.

הגדרה 3.5 המבנה הכפלי על $K(X)$ הוא מכפלה טנזורית. $\widetilde{K}(X)$ הוא אידיאל, מושרה עליו כפל.

הגדרה 3.6 $f:X\to Y$ מועברת ל־$f^*:K(Y)\to K(X)$ המשיכה לאחור.

הגדרה 3.7 מכפלה חיצונית $\mu:K(X)\otimes K(Y)\to K(X\times Y)$ נתונה על ידי $\mu(E\otimes E')=E*E'=\mathrm{pr}_1^*(E)\,\mathrm{pr}_2^*(E')$.
זה הומומורפיזם של חוגים.

משפט 3.8 (**Bott Periodicity**) $\widetilde{K}(X)=\widetilde{K}\left(S^2X\right)$ כחבורות. זו המטרה שלנו.

4 ה־Fundamental Product Theorem

כזכור, H מקיים $(H\otimes H)\oplus 1=H\oplus H$, קרי $(H-1)^2=0$. לכן יש $\mathbb{Z}[H]/(H-1)^2\to K\left(S^2\right)$.

משפט 4.1 (**Fundamental Product Theorem**) $\mu:K(X)\otimes\mathbb{Z}[H]/(H-1)^2\to K(X)\otimes K\left(S^2\right)\to K\left(X\times S^2\right)$ הוא איזומורפיזם.

מסקנה 4.2 $K\left(S^2\right)\cong\mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$, ו־$\widetilde{K}\left(S^2\right)=\ker\left(K\left(S^2\right)\to K(x_0)\right)$ נוצרת (כחבורה אבלית) על ידי $H-1$.

טענה 4.3 לכל $E'\to X\times S^2$ יש $E'\cong[E,f]$.

הוכחה: D_0, D_∞ שתי ההמיספרות, החיתוך שלהן והשפות שלהן הן S^1, ונסמן שם את הנקודה 1.
$E = E'|_{X\times\{1\}}, E_\alpha = E'|_{X\times D_\alpha}$.
$\pi_\alpha : X \times D_\alpha \to X \times \{1\}$ הומוטופית לזהות, ולכן $E_\alpha \cong \pi_\alpha^*(E) = E \times D_\alpha$ על ידי איזומורפיזם h_α.
נצמצם ל־$E \times S^1$, ואז $f = h_0 h_\infty^{-1} : E \times S^1 \to E \times S^1$ היא clutching function מתאימה. ■

אסטרטגיה: לפשט עוד ועוד את f.

פולינום לורן

טענה 4.4 תהי $g : Y \times S^1 \to \mathbb{C}$. אזי ניתן לקרב אותה במ"ש על ידי פולינומי לורן.

הוכחה: (סקירה) מגדירים את מקדמי פורייה, ומגדירים $u(y, r, \theta)$ טור פורייה, עם תיקון $r^{|n|}$, ובכל נקודה הוא מתכנס בהחלט במ"ש.
כש־$r \to 1$ זה שואף במ"ש ל־g, ואז ניקח r מספיק קרוב ל־1 (במ"ש) וכמות סופית של איברים (במ"ש). ■

טענה 4.5 $[E, \ell] \cong [E, f]$ ל־$\ell(x, z)$ פולינום לורן ב־z.

הוכחה: U_i כיסוי של X, עם טריו' מקומיות h_i. נבחר מ"פ על בעזרתם E.
$\operatorname{End}(E \times S^1)$ הוא מרחב וקטורי (נקודה נקודה), לכל $\alpha \in \operatorname{End}(E \times S^1)$ נגדיר $\|\alpha\| = \sup_{|v|=1} |\alpha(v)|$, נורמה, ובפרט א"ש משולש, כלומר אפשר לקחת סכומים קמורים.
(מוגדר היטב, כי בכל סיב, $|v| = 1$ קומפקטי, ו־$X \times S^1$ קומפקטי.)
$\operatorname{Aut}(E \times S^1)$ התמונה ההפוכה של המשלים של 0 תחת $\alpha \mapsto \inf_{(x,z)\in X\times S^1} \det|\alpha(x, z)|$.
מספיק להראות אם כן שפולינומי לורן צפופים ב־$\operatorname{End}(E \times S^1)$, כי אז עבור $f \in \operatorname{End}(E \times S^1)$ ניקח הומוטופיה $(1-t) f + t\ell$.
תהי φ_i חלוקת יחידה ל־U_i, $X_i = \operatorname{supp}(\varphi_i)$ קומפקטי ב־U_i.
על ידי h_i כל $f(x, z)$ היא מטריצה, והמקדמים הם פונקציות $X_i \times S^1 \to \mathbb{C}$.
לפי הטענה הקודמת, ניתנים לקירוב במ"ש עם פולינומי לורן, נבנה מטריצה פולינום לורן ℓ_i שמקרבת את $f(x, z)$ במ"ש ב־$X_i \times S^1$. היא מקרבת אותה כמובן בנורמה $\|\cdot\|$ ב־$X_i \times S^1$.
נגדיר $\ell = \sum \varphi_i \ell_i$, קירוב $\|\cdot\|$ על כל $X \times S^1$. ■

פולינום

טענה 4.6 $[E, fz^n] = [E, f] \otimes \hat{H}^n$ כאשר $\hat{H} = 1 * H$ הוא המשיכה לאחור של H תחת pr_2. (אנחנו מרחיבים את $H^n = [1, z^n]$ גם לשליליים).

הוכחה: זה ברור מאיך שמכפלה טנזורית מוגדרת. ■

מסקנה 4.7 $[E, f] \cong [E, q] \otimes \hat{H}^{-m}$ ל־$q(x, z)$ פולינום ב־z. ($\ell = qz^{-m}$).

לינארי

טענה 4.8 $\deg q \le n$, אז $[E, q] \oplus [nE, \mathrm{id}] \cong [(n+1)E, L^n q]$ כש־$L^n q(x, z) = a(x) z + b(x)$ לינארית ב־z.

הוכחה: נרשום $q(x, z) = \sum a_k(x) z^k$. כמו כן
$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & q \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -z & & & & \\ & 1 & -z & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & -z & \\ & & & & 1 & -z \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$
כל אחת היא אנדומורפיזם של $(n+1)E$ כשב־(i, j) יש את המקדם של ה־E ה־j בתוך ה־E ה־i, ו־1 זה הזהות וכו'.

אפשר לעבור מ־A ל־B על ידי פעולות אלמנטריות (זוכרים שכל מקדם במטריצה הוא העתקה לינארית, בכל סיב מטריצה, אז נעבוד במוגדלת), בהתחלה מורידים את ה־$-z$ משמאל למעלה לימין למטה, זה יוצר q בימין למטה, ואז מורידים את כל יתר המקדמים.
B היא clutching function ל־$[E,q]\oplus[nE,\mathrm{id}]$. הפעולות האלמנטריות שומרות על הדטרמיננטה, אז A clutching function L^nq, והיא לינארית ב־z.
ניתן לבצע פעולות אלמנטריות בצורה הומוטופית, אז $[(n+1)E, L^nq] \cong [E,q]\oplus[nE,\mathrm{id}]$. ■

טענה 4.9 $[E, a(x)z+b(x)] \cong [E, z+b'(x)]$ (אפשר להצטמצם ל־$a(x)=\mathrm{id}$).

הוכחה: (סתם טכני) $(1+tz)\left(a(x)\frac{z+t}{1+tz}+b(x)\right) = (a(x)+b(x)t)z+ta(x)+b(x)$.
ב־$t=0$ זה $a(x)z+b(x)$, ועבור $0\le t<1$ צד שמאל מראה שזו העתקה לינארית הפיכה, אז יש לנו הומוטופיה מ־0 לכל $t_0<1$.
ב־$t=1$ $a(x)+tb(x)$, הצמצום של $a(x)z+b(x)$ ל־$z=1$, ולכן הפיך, ולכן גם בסביבה של $t=1$ (רציפות דטרמיננטה), ובפרט ב־$t_0<1$.
$a(x)z+b(x)$ הומוטופי ל־$(a(x)+t_0b(x))z+t_0a(x)+b(x)$, כש־$a(x)+t_0b(x)$ הפיך, ובפרט : $(a(x)+t_0b(x))^{-1}$ איזו' $E\to E$.
נסמן $b'(x) = (a(x)+t_0b(x))^{-1}(t_0a(x)+b(x))$ ואז $[E,a(x)z+b(x)] \cong [E,(a(x)+t_0b(x))(z+b'(x))] \cong [E,z+b'(x)]$. ■

הערה 4.10 מאחר ו־$z+b(x)$ הפיך לכל x, אז אין ל־b ע"ע על S^1.

טענה 4.11 $b:E\to E$ אנדומורפיזם בלי ע"ע על S^1. אז יש $E\cong E_+\oplus E_-$, $b(E_\pm)\subset E_\pm$, והע"ע של $b|_{E_+}$ ו־$b|_{E_-}$ הם מחוץ ובתוך ל־S^1. והם יחידים.

הוכחה: נתחיל מהמקרה שיש $T:V\to V$ עם פולינום אופייני $q(t)$ בלי ע"ע על S^1.
יהי $q=q_+q_-$ פירוק לע"ע בחוץ ובפנים, $V_\pm=\ker q_\pm(T)$. הם זרים לכן $rq_++sq_-=1$.
לפי קיילי־המילטון $q(T)=q_+(T)q_-(T)$ ולכן $\mathrm{im}q_-(T)\subset\ker q_+(T)$. $r(T)q_+(T)+q_-(T)s(T)=\mathrm{id}$ ולכן $\ker q_+(T)\subset\mathrm{im}q_-(T)$. מכאן $V_\pm:=\ker q_\pm(T)=\mathrm{im}q_\mp(T)$.
מ־$q_+(T)r(T)+q_-(T)s(T)=\mathrm{id}$ נובע $V_-+V_+=V$. מ־$r(T)q_+(T)+s(T)q_-(T)=\mathrm{id}$ נובע $V_+\cap V_-=0$. אז $V_+\oplus V_-=V$.
$v\in V_\pm\Rightarrow q_\pm(T)(v)=0\Rightarrow q_\pm(T)(Tv)=Tq_\pm(T)(v)=0$ ולכן $T(V_\pm)\subset V_\pm$.
הע"ע של $T|_{V_\pm}$ נכנונים, כי $q_\pm(T)=0$ על $V_\pm$.

היחידות ברורה (הפולינום האופייני מתפרק בצורה יחידה, ואז מקבלים הכלות, שגוררות שוויונות מכך שזה סכום ישר).

(טכני, ללא הוכחה) אם T משתנה ברציפות, אז $q(t)$ משתנה ברציפות, וגם השורשים משתנים ברציפות, ולכן $q_\pm$ משתנים ברציפות.
בסיס $q_\pm(T)(v_i)$ הוא בסיס בסביבה, ולכן הפירוק $V=V_+\oplus V_-$ משתנה ברציפות.
ניקח אם כן את $E_\pm$ להיות תתי המרחבים $V_\pm$ בכל סיב. ■

מסקנה 4.12 $[E,z+b(x)]\cong[E_+,z+b_+(x)]\oplus[E_-,z+b_-(x)]$.

טענה 4.13 $[E,a(x)z+b(x)]\cong[E_+,\mathrm{id}]\oplus[E_-,z]$.

הוכחה: הצטמצמנו כבר למקרה $a(x)=\mathrm{id}$.
ל־b_+ אין ע"ע על S^1 אז $tz+b_+(x)$ הומוטופיה ל־$b_+(x)$, אבל זה איזומורפיזם של E, אז $[E_+,z+b_+(x)]\cong[E_+,b_+(x)]\cong[E_+,\mathrm{id}]$.
באותו אופן, $z+tb_-(x)$, אז $[E_-,z+b_-(x)]\cong[E_-,z]$. ■

מסקנה 4.14 הפירוק הנ"ל משמר סכומים ישרים ($[E_1\oplus E_2,L_1\oplus L_2]$, אז $(E_1\oplus E_2)_\pm=(E_1)_\pm\oplus(E_2)_\pm$).

סיכום ההוכחה

משפט 4.15 **(Fundamental Product Theorem)** $\mu : K\left(X\right)\otimes\mathbb{Z}\left[H\right]/\left(H-1\right)^2 \to K\left(X\right)\otimes K\left(S^2\right) \to K\left(X\times S^2\right)$ הוא איזומורפיזם.

הוכחה: יהי איבר ב־$K\left(X\times S^2\right)$. אפשר לרשום אותו כמחלקת שקילות של $[E,f]$ ומתקיים:

$$\begin{aligned}
[E,f] &\cong [E,\ell] \\
&\cong \left[E,qz^{-m}\right] \\
&\cong [E,q]\otimes\hat{H}^{-m} \\
&\cong \left(\left[\left(n+1\right)E,L^nq\right]-\left[nE,\mathrm{id}\right]\right)\otimes\hat{H}^{-m} \\
&\cong \left(\left[\left(\left(n+1\right)E\right)_+,\mathrm{id}\right]+\left[\left(\left(n+1\right)E\right)_-,z\right]-\left[nE,\mathrm{id}\right]\right)\otimes\hat{H}^{-m} \\
&\cong \mu\left(\left(\left(n+1\right)E\right)_+,H^{-m}\right)+\mu\left(\left(\left(n+1\right)E\right)_-,H^{1-m}\right)-\mu\left(nE,H^{-m}\right)
\end{aligned}$$

וזה אכן בתמונה של $K\left(X\right)\otimes\mathbb{Z}\left[H\right]/\left(H-1\right)^2$ תחת μ, אז μ על.

בשביל להראות שזה חח"ע, בונים פונקציה הפוכה ν.
מגדירים אותה ישירות, ומראים שהיא לא תלויה בבחירות שנעשו (m ב־$\ell=z^{-m}q$, n ב־$[E,q]\oplus[nE,\mathrm{id}]\cong\left[\left(n+1\right)E,L^nq\right]$ ו־t_0, ובבחירה של ℓ כ־clutching function). ■

5 משפט Bott Periodicity

טענה 5.1 אם $A\xrightarrow{i}X\xrightarrow{q}X/A$ אז $\widetilde{K}\left(X/A\right)\xrightarrow{q^*}\widetilde{K}\left(X\right)\xrightarrow{i^*}\widetilde{K}\left(A\right)$ מדוייקת.

הוכחה: (סקיצה), בכיוון האחד $qi:A\to A/A$ ומשיכה מ־A/A טריוויאלית אז $i^*q^*=0$, קרי $\mathrm{im}q^*\subset\ker i^*$.

בכיוון השני, לוקחים איבר ב־$\ker i^*$, כלומר $p:E\to X$ עם צמצום ל־A טריוויאלי (הוא טריוויאלי יציב, נוסיף טריוויאלי).
לוקחים טריו' $h:p^{-1}\left(A\right)\to A\times\mathbb{C}^n$, ומזהים ב־$E$ את $h^{-1}\left(x,v\right)$ עם $h^{-1}\left(y,v\right)$, ומקבלים $E/h\to X/A$, ומתקיים $E\cong q^*\left(E/h\right)$, ולכן $E\in\mathrm{im}q^*$.
צריך טריו' מקומית ל־E/h, מראים שיש טריו' של $A\subset U$ עבור E, והיא תשרה את הדרוש.
הרעיון הוא לקחת בסיס רציף (חתכים) בכל A, וכיסוי של A ב־X על ידי U_j שבהם E טריוויאלי.
משתמשים במשפט טיצה כדי להרחיב את הבסיס לכל U_j, ולוקחים חלוקת יחידה ל־A $U_j,X\setminus$ כדי להרחיב ל־$U=\bigcup U_j$. ■

טענה 5.2 אם A כוויץ, אז $\widetilde{K}\left(X/A\right)\xrightarrow{q^*}\widetilde{K}\left(X\right)$ איזומורפיזם.

הוכחה: (סקיצה), אנחנו יודעים כבר ש־$E\mapsto E/h$ הופכית מצד אחד, כי $q^*\left(E/h\right)=E$.
מראים שמחלקת השקילות של E/h לא תלויה ב־h, בגלל ש־A כוויץ, ההבדל בין h_0,h_1 הומוטופי לקבוע. ■

מסקנה 5.3 הסדרה

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & X \arrow[r] & X\cup CA \arrow[r] \arrow[d] & \left(X\cup CA\right)\cup CX \arrow[r] \arrow[d] & \left(\left(X\cup CA\right)\cup CX\right)\cup C\left(X\cup CA\right) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& & X/A & SA & SX &
\end{tikzcd}$$

משרה סדרה מדוייקת $\widetilde{K}\left(A\right)\to\widetilde{K}\left(X\right)\to\widetilde{K}\left(X/A\right)\to\widetilde{K}\left(SA\right)\to\widetilde{K}\left(SX\right)\to\cdots$.

עבור $X=A\vee B$ מקבלים ש־$X/A=B,X/A=B$, ולכן יש לנו $\widetilde{K}\left(A\right)\to\widetilde{K}\left(X\right)\to\widetilde{K}\left(B\right)$ וגם $\widetilde{K}\left(B\right)\to\widetilde{K}\left(X\right)\to\widetilde{K}\left(A\right)$, כשהן העתקות הפוכות.
לפי ה־splitting lemma מקבלים $\widetilde{K}\left(X\right)\cong\widetilde{K}\left(A\right)\oplus\widetilde{K}\left(B\right)$.

עכשיו ניקח $X\times Y, X\vee Y$ ולכן המנה $X\wedge Y$, $\widetilde{K}(S(X\times Y))\to\widetilde{K}(S(X\vee Y))\to\widetilde{K}(X\wedge Y)\to\widetilde{K}(X\times Y)\to$ $\widetilde{K}(X\vee Y)$.
כאמור $\widetilde{K}(X\vee Y)\cong\widetilde{K}(X)\oplus\widetilde{K}(Y)$.
על ידי כיווץ, ΣZ ו־SZ זה אותו דבר, ו־$\Sigma(X\vee Y)=\Sigma X\vee\Sigma Y$, אז $\widetilde{K}(S(X\vee Y))\cong\widetilde{K}(SX)\oplus\widetilde{K}(SY)$
אז בעצם $\left(\widetilde{K}(X)\oplus\widetilde{K}(Y)\right)\to\widetilde{K}(X\times Y)\to\widetilde{K}(X\wedge Y)\to\left(\widetilde{K}(SX)\oplus\widetilde{K}(SY)\right)\to\widetilde{K}(S(X\times Y))$.
ההעתקה האחרונה מתפצלת על ידי $(a,b)\mapsto\mathrm{pr}_1^*(a)+\mathrm{pr}_2^*(b)$ ובדומה הראשונה על ידי $(a,b)\mapsto(S\mathrm{pr}_1)^*(a)+(S\mathrm{pr}_2)^*(b)$.
אז זה נשבר ומקבלים $\widetilde{K}(X\times Y)\cong\widetilde{K}(X\wedge Y)\oplus\widetilde{K}(X)\oplus\widetilde{K}(Y)$.

עבור $a\in\widetilde{K}(X)=\ker(K(X)\to K(x_0))$ ו־b מתאים, $a*b=\mathrm{pr}_1(a)\,\mathrm{pr}_2(b)\in K(X\times Y)$, ו־$\mathrm{pr}_1(a)$ הוא 0 ב־$K(Y)$, ולהפך, אז $a*b$ הוא 0 ב־$K(X\vee Y)$.
אז $a*b$ ב־$\widetilde{K}(X\times Y)$ ונמשך באופן יחיד לאיבר ב־$\widetilde{K}(X\wedge Y)$, אז $\cdot*\cdot:\widetilde{K}(X)\otimes\widetilde{K}(Y)\to\widetilde{K}(X\wedge Y)$.

הערה 5.4 תזכורת - $\widetilde{K}\left(S^2\right)$ נוצרת על ידי $H-1$.

משפט 5.5 **(Bott Periodicity)** $\widetilde{K}(X)\cong\widetilde{K}\left(S^2X\right)$ כחבורות.

הוכחה: $\widetilde{K}(X)\cong\widetilde{K}\left(S^2\right)\otimes\widetilde{K}(X)$ כי $a\mapsto(H-1)\otimes a$.
$\widetilde{K}\left(S^2\right)\otimes\widetilde{K}(X)\cong\widetilde{K}\left(S^2\wedge X\right)$ איזומורפיזם לפי FPT.
$\widetilde{K}\left(S^2\wedge X\right)\cong\widetilde{K}\left(S^2X\right)$. ■

מסקנה 5.6 $\widetilde{K}\left(S^{2n+1}\right)=0,\widetilde{K}\left(S^{2n}\right)\cong\mathbb{Z}$.

הערה 5.7 המבנה הכפלי על $\mathbb{Z}\cong\widetilde{K}\left(S^2\right)$ הוא טריוויאלי כי היא נוצרת כחבורה אבלית על ידי $H-1$, ו־$(H-1)^2=0$.
מאידך, המבנה הכפלי על $\mathbb{Z}\cong\widetilde{K}\left(S^0\right)$ הוא כפל רגיל של שלמים.
אז זה אכן לא איזו' של חוגים.

6 הרחבה לתורת קוהומולוגיה

הגדרה 6.1 $\widetilde{K}^{-n}(X)=\widetilde{K}(S^nX)$ ו־$\widetilde{K}^{-n}(X,A)=\widetilde{K}(S^n(X/A))$.

הסדרה המדוייקת נסגרת על עצמה, $\widetilde{K}^0(X)\cong\widetilde{K}^{-2}(X)\to\widetilde{K}^0(A)\cong\widetilde{K}^{-2}(A)\to\widetilde{K}^{-1}(X,A)\to\widetilde{K}^{-1}(X)\to$ $\widetilde{K}^{-1}(A)\to\widetilde{K}^0(X,A)\to\widetilde{K}^0(X)\to\widetilde{K}^0(A)$

מהמחזוריות, אפשר גם להגדיר לחיוביים.

מגדירים את המכפלה $\widetilde{K}^i(X)\otimes\widetilde{K}^j(Y)\to\widetilde{K}^{i+j}(X\wedge Y)$ על ידי $\widetilde{K}^i(X)\otimes\widetilde{K}^j(Y)\cong\widetilde{K}\left(S^i\wedge X\right)\otimes\widetilde{K}\left(S^j\wedge Y\right)\to$ $\widetilde{K}\left(S^i\wedge X\wedge S^j\wedge Y\right)=\widetilde{K}^{i+j}(X\wedge Y)$, כאשר ההעתקה היא $*$.

נגדיר $\widetilde{K}^*(X)=\widetilde{K}^0(X)\oplus\widetilde{K}^1(X)$ ואז יש מכפלה $\widetilde{K}^*(X)\otimes\widetilde{K}^*(Y)\to\widetilde{K}^*(X\wedge Y)$, ועל ידי אלכסון, עם X.
מתקיים כרגיל $\alpha\beta=(-1)^{ij}\beta\alpha$ ל־$\alpha\in\widetilde{K}^i(X),\beta\in\widetilde{K}^j(X)$.

7 מסקנות

טענה 7.1 (בלי הוכחה) $\widetilde{K}(X)=[X,BU\times\mathbb{Z}]$ ו־$\widetilde{K}(SX)=[X,U]$.
(כש־$BU=\varinjlim BU(n)=\varinjlim G(n,\mathbb{C}^\infty)$ ו־$U=\varinjlim U(n)$.)

טענה 7.2 $U=\Omega^2U$.

הוכחה: $\widetilde{K}(SX)=\widetilde{K}\left(S^3X\right)$, ולכן $[X,U]=\left[S^2X,U\right]=\left[X,\Omega^2U\right]$, אז לפי יונדה, $U=\Omega^2U$. ■

טענה 7.3 $\pi_i\left(U\left(n\right)\right)=\pi_i\left(U\left(n+1\right)\right)=\pi_i\left(U\right)$ עבור $i<2n+1$.

הוכחה: ה־fiber bundle $U\left(n\right)\to U\left(n+1\right)\to S^{2n+1}$ נותן סדרה מדוייקת

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r] & \pi_{i+1}\left(S^{2n+1}\right) \arrow[dll] \\
\pi_i\left(U\left(n\right)\right) \arrow[r] & \pi_i\left(U\left(n+1\right)\right) \arrow[r] & \pi_i\left(S^{2n+1}\right) \arrow[dll] \\
\cdots & &
\end{tikzcd}$$

ועבור $i<2n+1$ מתקיים $\pi_i\left(S^{2n+1}\right)=0$, אז $0\to\pi_i\left(U\left(n\right)\right)\to\pi_i\left(U\left(n+1\right)\right)\to 0$, כלומר $\pi_i\left(U\left(n\right)\right)=\pi_i\left(U\left(n+1\right)\right)=\cdots$.
לפי קירוב סלולרי, $\pi_i\left(U\right)=\pi_i\left(U\left(n\right)\right)$ ל־n גדול מספיק. ∎

טענה 7.4 $\pi_{2i}\left(U\right)=\mathbb{Z},\pi_{2i+1}\left(U\right)=0$.

הוכחה: א $\pi_i\left(U\right)=\pi_i\left(\Omega^2U\right)=\pi_{i+2}\left(U\right)$.
עבור $n=1$ ו־$i=0,1$ מתקיים $i<2n+1$ ו־$U\left(1\right)=S^1$, אז $\pi_0\left(U\right)=\pi_0\left(S^1\right)=0$ וגם $\pi_1\left(U\right)=\pi_1\left(S^1\right)=\mathbb{Z}$. ∎

טענה 7.5 (בדרך אחרת) $\pi_{2i}\left(U\right)=\mathbb{Z},\pi_{2i+1}\left(U\right)=0$.

הוכחה: $\pi_i\left(U\right)=\left[S^i,U\right]=\widetilde{K}\left(SS^i\right)=\widetilde{K}\left(S^{i+1}\right)$. ∎