סמינר מורס – קיומן של פונקציות מורס

שי בן משה

21/11/2016

1 הקדמה

מטרת ההרצאה הזו היא להוכיח את קיומן של פונקציות מורס על יריעה חלקה M ממימד k.

לצורך כך, נזכר במשפט יסודי מהתורה של יריעות חלקות:

משפט (משפט השיכון של וויטני)**.** קיים n כך שקיים שיכון חלק $\psi : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

הוכחה. נוכיח רק עבור M קומפקטית. ובכן, יהי $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1}^m$ כיסוי סופי, שקיים מקומפקטיות. נבחר חלוקת יחידה $\{\rho_i\}_{i=1}^m$ שמתאימה לכיסוי הנ״ל. נרחיב את ההעתקות שלנו להעתקות $\tilde{\varphi}_i : M \to \mathbb{R}^{k+1}$ שמוגדרות $\tilde{\varphi}_i(p) = (\varphi_i(p)\rho_i(p), \rho_i(p))$ עבור $p \in U_i$ ו-0 אחרת. כעת נגדיר $\psi : M \to \mathbb{R}^{(k+1)m}$ על ידי $\psi(p) = (\tilde{\varphi}_1(p), \dots, \tilde{\varphi}_m(p))$.
נוכיח שהיא חח״ע, אם $\psi(p) = \psi(q)$ אז יש i כך שמתקיים $\tilde{\varphi}_i(p) = \tilde{\varphi}_i(p) \neq 0$ ובפרט, $\varphi_i(p) = \varphi_i(p) \neq 0, \rho_i(p) = \rho_i(q) \neq 0$ ומהחלק השני $p, q \in U_i$ והקורדינטות המקומיות הפיכות שם, אז $p = q$ מה שמוכיח חח״ע.
כדי לראות שהדיפרנציאל חח״ע, נבחין כי $\mathrm{d}\psi = (\mathrm{d}\tilde{\varphi}_1, \dots, \mathrm{d}\tilde{\varphi_m})$ אז עבור נקודה $p \in U_i$ מספיק לבדוק שהדיפרנציאל $\mathrm{d}\tilde{\varphi}_i$ הוא חח״ע. הוא מקיים $\mathrm{d}\tilde{\varphi}_i|_p(v) = (\mathrm{d}\varphi_i(v)\rho_i(p) + \varphi_i(p)\mathrm{d}\rho_i(v), \mathrm{d}\rho_i(v))$, אם $\mathrm{d}\rho_i(v) \neq 0$ אז סיימנו, אחרת החלק הראשון הוא $\mathrm{d}\varphi_i(v)\rho_i(p)$ ומאחר ו-$p \in U_i$ אז $\rho_i(p) = 0$ ומאחר ו-$\mathrm{d}\varphi_i$ חח״ע, סיימנו.
לבסוף, נראה שצמצום הטווח לתמונה מקיים שההפכית אכן רציפה, קרי שהמקור של סגורות הוא סגור. זה שקול לכך ש-ψ סגורה, אבל מאחר ו-M קומפקטית, אז סגורה היא גם קומפקטית, ולכן תמונתה קומפקטית ולכן גם סגורה, כנדרש. $\square$

מעתה נניח כי $M \subset \mathbb{R}^n$

הגדרה. עבור $p \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $L_p : M \to \mathbb{R}$ על ידי $L_p(q) = \frac{1}{2}\|p-q\|^2$.

נוכיח את המשפט הבא:

משפט. לכל $p \in \mathbb{R}^n$, פרט לקבוצה ממידה 0, L_p היא פונקצית מורס.

כדי להגדיר דברים בקורדינטות, נניח שיש לנו קורדינטות מקומיות: $\varphi = (u^1, \dots, u^k) : U \to \mathbb{R}^k$.

דוגמה. קו ישר שמשוכן כפרבולה, קרי $M = \{(t,t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ עם קורדינטות $\varphi = (u^1) : M \to \mathbb{R}, u^1(t,t^2) = t$.

דוגמה. ספירה $S^2 = \{(x^1,x^2,x^3) \mid \sum (x^i)^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ שמשוכנת כרגיל עם קורדינטות מקומיות $\varphi = (u^1,u^2) : S^2 \to \mathbb{R}^2$ הנתונות על ידי $\varphi^{-1}(a,b) = (\cos a \sin b, \sin a \sin b, \cos b)$.

2 מרחב נורמלי

הגדרה. בכל נקודה $p \in M$ יש שיכון $\mathrm{T}_pM \subset \mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$. בסיס עבור T_pM הוא $w_i|_p = \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_p$. ניתן להסתכל על המרחב הוקטורי המאונך, ולקבל את **המרחב הנורמלי** בנקודה:

$$\mathrm{N}_pM = (\mathrm{T}_pM)^\perp = \{w \in \mathrm{T}_p\mathbb{R}^n \mid \forall v \in \mathrm{T}_pM : \langle w,v \rangle = 0\}$$

ונבחר (באופן קונסיסטנטי) בסיס אורתונורמלי עבורו $w_{k+1}|_p, \dots, w_n|_p$, ונציג אותו לפי הבסיס הסטנדרטי: $w_\mu = \sum w_\mu^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$.

את כל המרחבים הנורמליים ניתן לאחד לכדי **האגד הנורמלי**:

$$\mathrm{N}M=\coprod_{p\in M}\mathrm{N}_pM\subset\mathrm{T}\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^{2n}$$

בחירת הבסיס מאפשרת לנו להגדיר קורדינטות על המרחב הנורמלי $(\varphi,\phi):\mathrm{N}M\to\mathbb{R}^n$ על ידי:

$$(\varphi,\phi)(p,v)=(\varphi,\phi)(p,\sum v^\mu w_\mu)=(\varphi(p),v^1,\ldots,v^{n-k})$$

לכן האגד הנורמלי מהווה יריעה בפני עצמו, ממימד n.

דוגמה. עבור $p=t$ המרחב המשיק, לפי הקורדינטות, נפרש על ידי $\frac{\partial}{\partial u^1}$, ונחשב אותו:

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\Big|_{(t,t^2)}f=\frac{\partial}{\partial r^1}\Big|_t\left(f\circ\varphi^{-1}\left(r^1\right)\right)=\frac{\partial}{\partial r^1}\Big|_t\left(f\left(r^1,\left(r^1\right)^2\right)\right)=\frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_{(t,t^2)}+2t\frac{\partial f}{\partial x^2}\Big|_{(t,t^2)}$$

כלומר $\frac{\partial}{\partial u^1}\Big|_{(t,t^2)}=\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{(t,t^2)}+2t\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_{(t,t^2)}$ ולכן המרחב הנורמלי הוא:

$$\mathrm{N}_tM=\left\{-2at\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{(t,t^2)}+a\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_{(t,t^2)}\mid a\in\mathbb{R}\right\}$$

וקורדינטות למרחב הנורמלי הן:

$$(u^1,u^2)=(\varphi,\phi)\left(t,-2at\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_{(t,t^2)}+a\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_{(t,t^2)}\right)=(t,a)$$

דוגמה. עבור $p=(\cos a\sin b,\sin a\sin b,\cos b)$ נחשב למשל:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\Big|_p\right)^1=\frac{\partial x^1}{\partial u^1}\Big|_p=\frac{\partial}{\partial a}\Big|_p(x^1\circ\varphi^{-1})=\frac{\partial}{\partial a}\Big|_p(\cos a\sin b)=-\sin a\sin b$$

ובסך הכל המרחב המשיק הוא $\mathrm{T}_pS^2=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-\sin a\sin b\\ \cos a\sin b\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos a\cos b\\ \sin a\cos b\\ -\sin b\end{pmatrix}\right\}$.

לכן המרחב הנורמלי הוא $\mathrm{N}_pS^2=\left\{R\begin{pmatrix}\cos a\sin b\\ \sin a\sin b\\ \cos b\end{pmatrix}\mid R\in\mathbb{R}\right\}=\left\{R\left(\varphi^{-1}(a,b)\right)^T\mid R\in\mathbb{R}\right\}$.

3 נקודות מוקד

הגדרה. נזכור שעבור $p\in\mathbb{R}^n$ יש לנו איזומורפיזם $D_p:\mathbb{R}^n\to\mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$ ולכן זה מגדיר איזומורפיזם $D:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{T}\mathbb{R}^n$ על ידי $D(p,v)=D_p(v)$. זה גם מגדיר לנו העתקה $\tilde{D}^{-1}:\mathrm{T}\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ששולחת לנקודה שגזירה בכיוונה זה הוקטור עצמו. מאחר ולפי הגדרה $\mathrm{N}M\subset\mathrm{T}\mathbb{R}^n$ זה מאפשר לנו להגדיר העתקה $E:\mathrm{N}M\to\mathbb{R}^n$ שעבור נקודה $p\in M\subset\mathbb{R}^n$ ווקטור $v\in\mathrm{N}_pM$ מוגדרת להיות $E(p,v)=p+\tilde{D}^{-1}(v)$, או קצת יותר מפורשות:

$$E\left(p,v\right)=E\left(\sum p_\alpha e^\alpha,\sum\sum v^\mu w_\mu^\alpha(p)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)=\sum p_\alpha e^\alpha+\sum\sum v^\mu w_\mu^\alpha(p)e^\alpha=\sum\left(p_\alpha+\sum v^\mu w_\mu^\alpha(p)\right)e^\alpha$$

ובקורדינטות:

$$E\left(\left(\varphi,\phi\right)^{-1}\left(r^1,\ldots,r^n\right)\right)=\sum\left(x^\alpha\left(\varphi^{-1}\right)+\sum r^\mu w_\mu^\alpha\left(\varphi^{-1}\right)\right)e^\alpha$$

נקודה $e\in\mathbb{R}^n$ נקראת **נקודת מוקד** מריבוי $m>0$ של הנקודה $p\in M$ אם יש וקטור $v\in\mathrm{N}_pM$ שעבורו $e=E(p,v)$ והאפסיות של הדיפרנציאל בנקודה הוא m, כלומר $\operatorname{null}\left(\mathrm{d}E|_{(p,v)}\right)=\dim\ker\mathrm{d}E|_{(p,v)}=m$.

עבור נקודה (q,v) יש איזומורפיזם קנוני:

$$\mathrm{T}_{(p,v)}\mathrm{N}M\cong\mathrm{T}_qM\oplus\mathrm{T}_v\mathrm{N}_pM\cong\mathrm{T}_pM\oplus\mathrm{N}_pM=\mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$$

ומאחר והעתקה $E:\mathrm{N}M\to\mathbb{R}^n$ אז באופן טבעי מקבלים שהדיפרנציאל הוא $\mathrm{d}E:\mathrm{T}_pM\oplus\mathrm{N}_pM\to\mathrm{T}_pM\oplus\mathrm{N}_pM$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_i^\alpha|_{(p,v)} &= \frac{\partial E^\alpha}{\partial u^i}\\ &= \frac{\partial}{\partial r^i}\left(E^\alpha\left((\varphi,\phi)^{-1}(r)\right)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial r^i}\left(x^\alpha\left(\varphi^{-1}\right)+\sum r^\mu w_\mu^\alpha\left(\varphi^{-1}\right)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial u^i}(x^\alpha)+\sum t^\mu\frac{\partial}{\partial u^i}\left(w_\mu^\alpha\right)\end{aligned}$$

ולכן עבור $X\in\mathrm{T}_pM$:

$$\mathrm{d}E|_{(p,v)}(X)=X+X\tilde{v}$$

ובדומה

$$\mathrm{d}E_\mu^\alpha|_{(p,v)}=\frac{\partial E^\alpha}{\partial u^\mu}=\frac{\partial}{\partial r^\mu}\left(x^\alpha\left(\varphi^{-1}\right)+\sum r^\nu w_\nu^\alpha\left(\varphi^{-1}\right)\right)=w_\mu^\alpha|_p$$

ולכן עבור $X\in\mathrm{T}_pM$:

$$\mathrm{d}E|_{(p,v)}(X)=X$$

דוגמה. בקורדינטות של $\mathrm{N}M$ שלקחנו מתקיים $E((\varphi,\phi)^{-1}(t,a))=(t,t^2)+(-2at,a)=(t-2at,t^2+a)$, נחשב את הדיפרנציאל בקורדינטות האלו:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right) &= \frac{\partial E^1}{\partial u^1}\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial E^2}{\partial u^1}\frac{\partial}{\partial x^2}\\ &= \frac{\partial}{\partial r^1}\left(E^1\left((\varphi,\phi)^{-1}\left(r^1,r^2\right)\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial r^1}\left(E^2\left((\varphi,\phi)^{-1}\left(r^1,r^2\right)\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^2}\\ &= \frac{\partial}{\partial r^1}\left(r^1-2r^2r^1\right)\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial r^1}\left(\left(r^1\right)^2+r^2\right)\frac{\partial}{\partial x^2}\\ &= (1-2a)\frac{\partial}{\partial x^1}+2t\frac{\partial}{\partial x^2}\end{aligned}$$

ובאופן דומה

$$\mathrm{d}E\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right)=-2t\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial x^2}$$

או כמטריצה $\mathrm{d}E=\begin{pmatrix}1-2a & -2t\\ 2t & 1\end{pmatrix}$. נחשב את הדטרמיננטה, כדי לראות איפה היא מנוונת, ונקבל שצריך להתקיים $1-2a+4t^2=0$ כלומר $a=\frac{1+4t^2}{2}$ ולכן הנקודה $E((\varphi,\phi)^{-1}(t,\frac{1+4t^2}{2}))=\left(-4t^3,\frac{1+6t^2}{2}\right)$ נקודת מוקד מריבוי 1.

דוגמה. יש כאן טעויות. התוצאה בסוף נכונה, אבל יש טעויות חישוב. בקורדינטות של $\mathrm{N}S^2$ שלקחנו מתקיים $E(a,b,R)=(1+R)x(a,b)$ ולכן:

$$\mathrm{d}E=\begin{pmatrix}-(1+R)(\sin a\sin b) & (1+R)(\cos a\cos b) & \cos a\sin b\\ (1+R)(\cos a\sin b) & (1+R)(\sin a\cos b) & \sin a\sin b\\ 0 & 0 & \cos b\end{pmatrix}$$

נחשב את הדטרמיננטה ונקבל שצריך להתקיים $-(1+R)^2\cos^2 b\sin a=0$ כלומר כאשר $R=-1$ יש נקודת מוקד מריבוי 2.

כעת נזכר במשפט סרד:

משפט (משפט סרד)**.** תהי $f:M_1\to M_2$ העתקה C^1 בין שתי יריעות מאותו מימד, אז קבוצת הערכים הסינגולריים של f (כלומר, נקודות $y=f(x)$ ב-M_2 שבהן $\mathrm{d}f$ סינגולרית) היא ממידה 0.

מסקנה. אוסף נקודות המוקד של M הוא ממידה 0.

4 לקראת המשפט המרכזי

דוגמה. נחשב מתי $f = L_p$ היא פונקציית מורס, כאשר $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$. ובכן,

$$f(t,t^2) = \frac{1}{2}\left\|(t,t^2) - p\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(t^2 - 2tp_1 + p_1^2 + t^4 - 2t^2p_2 + p_2^2\right)$$

אז הדיפרנציאל מיוצג על ידי:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u^1} &= \frac{\partial}{\partial r^1}\left(f \circ (\varphi,\phi)^{-1}\left(r^1\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial r^1}\left(f\left(r^1, \left(r^1\right)^2\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial r^1}\left(\left(r^1\right)^2 - 2r^1p_1 + p_1^2 + \left(r^1\right)^4 - 2\left(r^1\right)^2 p_2 + p_2^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2t - 2p_1 + 4t^3 - 4tp_2\right) \\
&= t - p_1 + 2t^3 - 2tp_2 \\
&= -\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

ואם הדיפרנציאל מתאפס בנקודה, אז ההסיאן הוא:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\left(u^1\right)^2} = 1 + 6t^2 - 2p_2$$

נדרוש ששני הגדלים לעיל יתאפסו, מהשני נקבל $p_2 = \frac{1+6t^2}{2}$ ולכן מהראשון נקבל $p_1 = t + 2t^3 - t - 6t^3 = -4t^3$, כלומר שמתקיים $p = \left(-4t^3, \frac{1+6t^2}{2}\right)$ אם ורק אם לפונקציה יש סינגולריות מנוונת, שזה אם ורק אם היא לא מורס, בדיוק מה שקיבלנו על נקודות המוקד!

5 עוד על נקודות מוקד

משפט. יהיו $q \in M$ נקודה וכן $v \in \mathrm{N}_qM$ וקטור. אזי $p = E(q,v)$ היא נקודת מוקד על ידי q, v אם ורק אם ההעתקה הבילינארית $B : \mathrm{T}_qM \otimes \mathrm{T}_qM \to \mathbb{R}$ המוגדרת $B(X,Y) = \langle X, Y\rangle - \left\langle v, X\tilde{Y}\right\rangle$ מנוונת.

הוכחה. עבור נקודה (q,v) נגדיר את ההעתקה $A|_{(q,v)}(X,Y) = \left\langle \mathrm{d}E|_{(q,v)}(X), Y\right\rangle$. מאחר ואנחנו כופלים פנימית במשהו מדרגה מלאה, האפסיות נשארת זהה, קרי $\mathrm{null}\left(\mathrm{d}E|_{(q,v)}\right) = \mathrm{null}\left(A|_{(q,v)}\right)$. נפרק את X, Y לחלקים המשיקים והמאונכים ונקבל:

$$\begin{aligned}
A|_{(q,v)}(X^T + X^N, Y^T + Y^N) &= \left\langle \mathrm{d}E(X^T + X^N), Y^T + Y^N\right\rangle \\
&= \left\langle X^T + X^T\tilde{v} + X^N, Y^T + Y^N\right\rangle \\
&= \left\langle X^T, Y^T\right\rangle + \left\langle X^T\tilde{v}, Y^T\right\rangle + \left\langle X^T\tilde{v}, Y^N\right\rangle + \left\langle X^N, Y^N\right\rangle
\end{aligned}$$

נסמן את הצמצום למרחב $\mathrm{T}_qM \otimes \mathrm{T}_qM$ על ידי $B|_{(q,v)} : \mathrm{T}_qM \otimes \mathrm{T}_qM \to \mathbb{R}$ המוגדרת $B|_{(q,v)}(X,Y) = \langle X, Y\rangle + \langle X\tilde{v}, Y\rangle$. נזכור גם כי $\langle v, Y\rangle = 0$ ולכן $\langle X\tilde{v}, Y\rangle + \left\langle v, X\tilde{Y}\right\rangle = 0$ אז אפשר לרשום $B|_{(q,v)}(X,Y) = \langle X, Y\rangle - \left\langle v, X\tilde{Y}\right\rangle$. הצמצום למרחב $\mathrm{N}_qM \otimes \mathrm{N}_qM$ נותן העתקה מדרגה מלאה, כי זו מכפלה פנימית בתוך $\mathbb{R}^n$ ולכן האפסיות שווה לאפסיות של הצמצום הקודם, כלומר $\mathrm{null}\left(\mathrm{d}E|_{(q,v)}\right) = \mathrm{null}\left(B|_{(q,v)}\right)$. $\square$

6 המשפט המרכזי וטענות נוספות

כעת נוכיח את המשפט המרכזי.

משפט. לכל $p \in \mathbb{R}^n$, פרט לקבוצה ממידה 0, L_p היא פונקציית מורס.

הוכחה. תהי $p \in \mathbb{R}^n$ ונסמן $v(q) = D_q(p-q) \in \mathrm{N}_q M$. אז מתקיים:

$$f(q) = L_p(q) = \frac{1}{2}\left\|p-q\right\|^2 = \frac{1}{2}\left\langle p-q, p-q\right\rangle$$

נחשב את הדיפרנציאל $\mathrm{d}f$ בנקודה:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) &= \frac{\partial}{\partial u^i}(f) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r^i}\left(\left\langle p-\varphi^{-1}, p-\varphi^{-1}\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r^i}\left(\sum p_\alpha^2 + \left(\varphi_\alpha^{-1}\right)^2 - 2p_\alpha\varphi_\alpha^{-1}\right) \\
&= \sum(q_\alpha - p_\alpha)\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \\
&= -\left\langle v(q), \frac{\partial}{\partial u^i}\right\rangle
\end{aligned}$$

ולכן באופן כללי:

$$\mathrm{d}f\left(X\right) = -\left\langle v(q), X\right\rangle \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_{f(q)}$$

ומכאן שהנקודה q היא קריטית אם ורק אם $v(q) \in \mathrm{N}_p M$.
כעת נחשב את ההסיאן בנקודה קריטית, ונקבל בדומה:

$$\begin{aligned}
\left.\mathrm{Hess}f\right|_q\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) &= \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\sum(q_\alpha - p_\alpha)\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\right) \\
&= \sum\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^j}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} + \sum(q_\alpha - p_\alpha)\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^j \partial u^i} \\
&= \left\langle\frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial x}{\partial u^j}\right\rangle - \left\langle v(q), \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}\right\rangle
\end{aligned}$$

ולכן באופן כללי:

$$\left.\mathrm{Hess}f\right|_q(X,Y) = \langle X, Y\rangle - \left\langle v(q), X\tilde{Y}\right\rangle$$

כלומר:

$$\left.\mathrm{Hess}f\right|_q = \left.B\right|_{(q,v(q))}$$

אז f לא מורס (כלומר ל-f יש נקודה קריטית מנוונת) אם יש $q \in M$ כך ש-p היא נקודה מוקד ביחס לוקטור $v(q)$, ובפרט p צריכה להיות נקודת מוקד. ואולם, יש רק קבוצה ממידה 0 של נקודות מוקד, וסיימנו. $\square$

כעת נחשב את האינדקס של הנקודות הקריטיות.

טענה. תהי q נקודה קריטית של $f = L_p$, אז האינדקס שווה לכמות נקודות המוקד בקטע שבין p ו-q.

הוכחה. אם נעבוד בקורדינטות, אז זה עתה ראינו שמתקיים: $\mathrm{Hess}f_{ij}|_q = B_{ij}|_{(q,v(q))} = g_{ij} + \langle v(q), l_{ij}\rangle$. נניח בה"כ כי $g_{ij} = \delta_{ij}$.
ובכן, יהי $-t$ מספר שלילי,
$-t$ ע"ע של $B_{ij}|_{(q,v(q))}$,
אמ"מ $B_{ij}|_{(q,v(q))} - (-t)\delta_{ij} = (1+t)\delta_{ij} + \langle v(q), l_{ij}\rangle$ סינגולרית,
אמ"מ $B_{ij}|_{(q,\frac{1}{1+t}v(q))} = \delta_{ij} + \left\langle \frac{1}{1+t}v(q), l_{ij}\right\rangle$ סינגולרית,
אמ"מ $E\left(q, \frac{1}{1+t}v(q)\right) = q + \frac{1}{1+t}(p-q)$ נקודת מוקד. $\square$

7 קירוב על ידי פונקציות מורס

משפט. תהי $f:M\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה. אזי ניתן לקרב אותה במ״ש על ידי פונקציית מורס $g:M\to\mathbb{R}$. יתרה מכך, בהנתן $K\subset M$ קומפקטית וכן l טבעי, ניתן לדאוג שהנגזרות החלקיות מסדר $i<k$ של g מקרבות את אלו של f במ״ש ב-K.

הוכחה. נבחר שיכון חסום $\psi:M\to\mathbb{R}^n$ כך שמתקיים $\psi_1=f$. לכל נקודה c, קיימים $\varepsilon_i<\frac{1}{c}$ כך שהנקודה $p=-ce^1+\sum\varepsilon_i e^i$ נותנת פונקציית מורס L_p. נגדיר $g(x)=\frac{L_p(x)-\frac{1}{2}c^2}{c}$ ונטען שהיא מקיימת את הדרוש. ובכן, מתקיים:

$$\begin{aligned}
g(x)-f(x) &= \frac{L_p(x)-\frac{1}{2}c^2}{c}-f(x)\\
&= \frac{\|p-\psi(x)\|^2-c^2}{2c}-f(x)\\
&= \frac{\left\|-ce^1+\sum\varepsilon_i e^i-\psi(x)\right\|^2-c^2}{2c}-f(x)\\
&= \frac{(-c+\varepsilon_1-f(x))^2+\sum_{i>1}(\varepsilon_i-\psi_i(x))^2-c^2}{2c}-f(x)\\
&= \frac{c^2-2c\varepsilon_1+2cf(x)+\sum(\varepsilon_i-\psi_i(x))^2-c^2}{2c}-f(x)\\
&= \frac{\sum(\varepsilon_i-\psi_i(x))^2}{2c}-\varepsilon_1
\end{aligned}$$

את כל הגדלים האלו אנו יכולים להגדיל ככל שנרצה, על ידי הגדלת c. □